Théorème :

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On a équivalence entre :
(i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
(ii) $\forall x, y \in I$ tels que $x \leq y$ on a $[x, y] \subset I$.

Démonstration
(i) $\Rightarrow$ (ii) ok
(ii) $\Rightarrow$ (i)
Supposons : $\forall x, y \in I$ tels que $x \leq y$ on ait $[x, y] \subset I$, montrons que I est un intervalle.
Si $I = \varnothing$: ok
Sinon, considérons $x \in I$ et posons $I^+ = I \cap [x, +\infty[$ et $I^- = I \cap]-\infty, x]$ de sorte que $I = I^+ \cup I^-$.
Si I^+ n'est pas majoré, montrons $I^+ = [x, +\infty[$.
On a déjà $I^+ \subset [x, +\infty[$.
Inversement, soit $t \in [x, +\infty[$.
Comme I^+ n'est pas majoré par t , $\exists y \in I^+$ tel que $t < y$.
Mais on a alors $x \in I, y \in I$ avec $x \leq y$ donc $[x, y] \subset I$.
Or $t \in [x, y]$, donc $t \in I$ puis $t \in I^+$.
Ainsi $[x, +\infty[\subset I^+$ ce qui permet, par double inclusion de conclure $I^+ = [x, +\infty[$.
Si I^+ est majoré, posons $b = \sup I^+$ et montrons que $I^+ = [x, b[$ ou $I^+ = [x, b]$.
Puisque I^+ est majoré par b , on a déjà $I^+ \subset [x, b]$.
Montrons maintenant que $[x, b[\subset I^+$.
Soit $t \in [x, b[$. Comme $t < b$, t n'est pas un majorant de I^+ et donc $\exists y \in I^+$ tel que $t < y$.
Mais on a alors $x \in I, y \in I$ avec $x \leq y$ donc $[x, y] \subset I$.
Or $t \in [x, y]$, donc $t \in I$ puis $t \in I^+$.
Ainsi $[x, b[\subset I^+ \subset [x, b]$.
Selon que b appartient ou non à I^+ on a : $I^+ = [x, b[$ ou $I^+ = [x, b]$.
Finalement on a montré que I^+ est de l'une des trois formes suivantes :
$[x, +\infty[, [x, b[$ ou $[x, b]$ (avec $b \in \mathbb{R}$).
En procédant de manière symétrique, on montre que I^- est de l'une des trois formes suivantes :
$]-\infty, x],]a, x]$ ou $[a, x]$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
Dans chacun des neuf cas alors possibles, $I = I^+ \cup I^-$ est un intervalle.